単重変圧器捲線内の電圧分布式について

池 尻 忠 夫・長 田 晋 吾

On the Voltage Distribution Formula of the Single Layer Transformer Windings.

Tadao IKEJIRI, Shingo NAGATA

On the voltage distribution brought about on the single layer transformer Windings, the authors made some analysis by assumming that the winding function will take Fourier's series as in Ogawa's article, obtained then a perfect solution, and especially endeavored to obtain a singular solution. And the mode of the voltage distribution could thus be made clear.

単重変圧器捲線に生起する電位分布に就いて，捲線函数は，小川氏の論文同様Fourier級数の形をとるものとして解析を行い，完全解を求め，その際特に特解の求め方に意を用いた。之により電位分布の模様を判然とする事が出来るようになつた。

1. 緒　　言

単重変圧器捲線内の電圧分布についての一般式が既に小川氏[1]により計算されている。然しながらその解は概念的で理解に困難な点が無いでもない。そこで特にその特解の算出に意を用いて電圧分布の模様の把握に容易なる如くした。

2. 基 礎 方 程 式 の 解

前記文献の如く変圧器の捲線函数，即ち誘導，容量，導電率の諸函数がFourier級数で与えられるとすれば，

$$\left.\begin{aligned}
\text{誘　導}\ l(x,\xi) &= L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos n(x-\xi) \cdots\cdots \\
\text{容　量}\ c(x,\xi) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n(x-\xi) \cdots\cdots \\
\text{導電率}\ g(x,\xi) &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos n(x-\xi) \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

対地容量 ε : 常数　　対地導電率 η : 常数

従つて次の方程式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
-\partial u(x,t)\big/\partial x &= \gamma v(x,t) + \partial\big/\partial t\int_0^{\pi} l(x,\xi)v(\xi,t)d\xi \\
-\partial v(x,t)\big/\partial x &= \int_0^{\pi} g(x,\xi)[u(x,t)-u(\xi,t)]d\xi + \eta\cdot u(x,t) \\
&\quad + \int_0^{\pi}\partial\big/\partial t\, c(x,\xi)[u(x,t)-u(\xi t)]d\xi + \partial\big/\partial t\,\varepsilon\cdot u(x,t)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

上式に Laplace 変換を適用して時間に独立な形に変換すると

$$\left.\begin{aligned}
-dL(x)\big/dx &= \gamma V(x) + \lambda\int_0^{\pi}\left\{L_0+\sum_{n=1}^{\infty}L_n\cos n(x-\xi)\right\}V(\xi)d\xi \\
-dV(x)\big/dx &= \left\{\int_0^{\pi}\left[(G_0+\lambda C_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(G_n+\lambda C_n)\cos n(x-\xi)\right]d\xi+\lambda\varepsilon+\eta\right\}U(x) \\
&\quad + \int_0^{\pi}\left[(G_0+\lambda C_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(G_n+\lambda C_n)\cos n(x-\xi)\right]U(\xi)d\xi
\end{aligned}\right\}\cdots(2)'$$

上式は更に変換を経て

$$\left.\begin{aligned}
&d^2U(x)\big/dx^2-\gamma\left\{\theta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\sin nx\right\}U(x)=a_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}\sin nx \\
&\text{但し}\quad \theta_0\equiv(G_0\pi+\eta)+\lambda(C_0\pi+\varepsilon) \\
&\qquad \theta_n\equiv-2/n'\cdot(G_n'+\lambda C_n') \qquad n'=1,3,5,\cdots\cdots\infty \\
&\qquad a_{10}\equiv\gamma\cdot Y_0\cdot F_{30} \qquad a_{2n}=\gamma\cdot Y_n\cdot F_{4n}-\lambda L_n\cdot F_{2n} \\
&\qquad a_{3n}\equiv\gamma\cdot Y_n\cdot F_{5n}+\lambda L_n\cdot F_{1n} \qquad Y_0\equiv(G_0+\lambda C_0) \\
&\qquad Y_n\equiv(G_n+\lambda C_n)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

（3） 式の右辺を 0 とおき $x=\pi\big/2-Z$ とすると

$$d^2U(Z)\big/dZ^2-\gamma\left\{\theta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos nZ\right\}U(Z)=0 \cdots\cdots(4)$$

之は次の如く書き換えられる。

$$d^2U(Z)\big/dZ^2+\sum_{s=-\infty}^{\infty}a_s\,e^{2isZ}\,U(Z)=0 \cdots\cdots(4)'$$

（4）′ 式の解法として Hill 氏の解法を用いる。即ち

$$U(Z)=e^{\lambda Z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m\,e^{2imZ} \cdots\cdots(5)$$

と仮定し　以下大凡前掲論文と略同様にして一般解が求められる。之は重複するので省略し結果のみ記することにすれば，

$$U(Z)=e^{\lambda Z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}-\left[\Delta_m\big/\Delta_0\right]\cdot b_0\,e^{2imZ}$$

又は

$$U(Z)=e^{\lambda Z}\,b_0\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta_m}{\Delta_0}e^{2imZ}+\frac{\Delta_{-m}}{\Delta_0}e^{-2imZ}\right)\right\} \cdots\cdots(6)$$

ここで Δ_0 は i を含まない事が判り，Δ_m は i を含む項と含まない項とある事が判り，而も Δ_m の i を含まない項と Δ_{-m} のそれとは相等しく Δ_m のiを含む項と Δ_{-m} のそれとは絶対値相等しく符号が

反対であることが知られる。従つて次の様に書き改められる。

$$\Delta_m/\Delta_0 = \gamma_m + i\beta_m \qquad \Delta_{-m}/\Delta_0 = \gamma_m - i\beta_m \quad \cdots\cdots (7)$$

（7）を（6）に代入すると

$$\mathrm{U(Z)} = \mathrm{b_0\, e^{\lambda Z}} \left\{1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_m \cos m\mathrm{Z} - \beta_m \sin m\mathrm{Z})\right\} \cdots\cdots (8)$$

3. 特　　解

今　$\mathrm{a_0} = -9\left[1-\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]/\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)} - \mathrm{k}_m{}^2$

$\mathrm{a}_s = \mathrm{a}_{-s} = (-1)^s\, 3\left[1-\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]^s \cdot \left[\mathrm{s} - 3/\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]/\mathrm{C}^s$ （C, k_m は共に常数）

とすれば，（4′）式は

$$\mathrm{d^2U/dZ^2} - \left\{9\cdot\left[1-\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]/\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)} + \mathrm{k}_m{}^2 + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s 3\left[1-\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]^s \left[\mathrm{s}-3/\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right] \times \left[\mathrm{e}^{2isZ}+\mathrm{e}^{-2isZ}\right]/\mathrm{C}^s\right\} \mathrm{U} = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

$\mathrm{Z} = \theta/2$ とすれば，（9）式は

$$\frac{\mathrm{d^2U}}{\mathrm{d}\theta^2} + \left\{-\frac{9}{4}\frac{1-\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}}{\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}} - \left(\frac{\mathrm{k}_m}{2}\right)^2 - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(\frac{3}{2})\mathrm{C}^s\left[3-\mathrm{s}\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]}{\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\cdot\left[1+\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]^s}\cos s\theta\right\} \cdots (10)$$

然るに $1/1+\mathrm{C}\cos\theta = 1/\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s 2\mathrm{C}^s \cos s\theta \Big/ \sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\cdot\left[1+\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]^s$

$$1/(1+\mathrm{C}\cos\theta)^2 = 1/(1-\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s 2\mathrm{C}^s\left[1+\mathrm{s}\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\cos s\theta\Big/(1-\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}\left[1+\sqrt{(1-\mathrm{C}^2)}\right]^s\right]$$

故に

$$\mathrm{d^2U}/\mathrm{d}\theta^2 + \left\{9/4 - \left(\mathrm{k}_m/2\right)^2 - 3/(1+\mathrm{C}\cos\theta) + 3/4\cdot(1-\mathrm{C})^2/(1+\mathrm{C}\cos\theta)^2\right\}\mathrm{U} = 0 \cdots (11)$$

$\mathbb{U} = (1 + \mathrm{C}\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{U}$ とすれば

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta\left\{(1-\mathrm{C}\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\mathbb{U}/\mathrm{d}\theta\right\} - \left(\mathrm{k}_m/2\right)^2(1+\mathrm{C}\cos\theta)^3\,\mathbb{U} = 0$$

今 $\mathrm{a}_{3n} \gg \mathrm{a}_{2n}$ 時を考えると，更に変換を施して原式は次の如くなる。

$$\mathrm{d}/\mathrm{dZ}\left\{(1-\delta\sin^2\mathrm{Z})^3\,\mathrm{d}\mathbb{U}/\mathrm{dZ}\right\} - \mathrm{k}_m{}^2(1-\delta\sin^2\mathrm{Z})^3\,\mathbb{U} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}_{3n}\cdot\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z} = 0 \cdots (12)$$

特解として次の式を考える。

$$\mathbb{U} = \frac{\mathrm{A}_m\delta\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}}{(1-\delta\sin^2\mathrm{Z})^2} - \frac{\mathrm{B}_m\delta\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}}{1-\delta\sin^2\mathrm{Z}} + \Phi \quad \cdots\cdots (13)$$

ここで $\delta = 2\mathrm{C}/(1-\mathrm{C})$ とす。

之を前式に代入して，$\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}$ 及び $(1-\delta\sin^2\mathrm{Z})\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}$ の項の係数の和を夫々0としそれ以

外の項の総和を0とすると，次の関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned} A_m &= 2-\delta \Big/ \{(k_m/2)^2-2\}B_m \\ B_m &= \alpha \Big/ (2m+1) \Big/ \{4(1-\delta)/(2-\delta)^2\}+6/\{(k_m/2)^2-2\} \\ (1-\delta\sin^2 Z)\frac{d^2\Phi}{dZ^2} &-6\delta\sin Z\cos Z\frac{d\Phi}{dZ}-k_m{}^2(1-\delta\sin^2 Z)\Phi+B_m k_m{}^2\delta\sin Z\cos Z=0 \end{aligned}\right\} \cdots (14)$$

次に $\Phi=\{a_0\sin Z + a_1\sin^3 Z + a_2\sin^5 Z + \cdots\cdots + a_n\sin^{2n+1}Z + \cdots\cdots\}\cos Z$ を代入し $\sin Z\cos Z$ $\sin^{-3}Z\cos Z$ $\sin Z\sin^5 Z\cos Z$ ……… 等の項の係数の和を夫々0とすると

$$a_1=\frac{1+(k_m/2)^2+3\times0.5\delta}{1\times1.5}a_0-\frac{(k_m/2)^2}{1\times1.5}\delta B_m$$

$$a_2=\frac{2^2+(k_m/2)^2+4\times1.5\delta}{2\times2.5}a_1-\frac{1\times4+(k_m/2)^2}{2\times2.5}\delta a_0$$

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

今 $$x_n=\frac{n^2+(k_m/2)^2+(n+2)(n-0.5)\delta}{n(n+0.5)} \quad y_n=\frac{(n-1)(n+2)+(k_m/2)^2}{n(n+0.5)}\delta$$

とすると $$a_1=x_1a_0-y_1B_m \quad , \quad a_2=x_2a_1-y_2a_0$$

$$a_3=x_3a_2-y_3a_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=x_na_{n-1}-y_na_{n-2}$$ となる。

従つて a_0 なる定数が与えられさえすれば（13）式より⑪の特解が求められる筈である。然るに a_0 を任意に定めたとすると，（13）式は必ずしも収斂しない。今 n が次第に大となり遂に無限大に近づく時に，a_n が 0 に収斂するように，a_0 を定めると次の如き連分数となる。

$$a_0=B_m\left\{\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

今 $$f_1=\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}-\cdots\cdots\cdots$$

$$f_2=\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_4}{x_4}-\frac{y_5}{x_5}-\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n=\frac{y_n}{x_n}-\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}-\frac{y_{n+2}}{x_{n+2}}-$$

とすると，次の関係式が得られる。

$$a_0=B_mf_1 \quad , \quad a_1=B_m f_1 f_2 \quad , \quad a_2=B_m f_1 f_2 f_3$$

$$a_n=B_m f_1 f_2 f_3 \cdots\cdots\cdots f_{n+1}$$

$$\Phi=\{f_1+f_1f_2\sin^2 Z+f_1f_2f_3\sin^4 Z+\cdots+f_1f_2f_3\cdots f_{n+1}\sin^{2n}Z+\cdots\}\times\sin Z\cos Z \cdots\cdots (15)$$

而して f_n なる値は n が相当に大なる時は δ より少し許り大なる値で常に 1 より小であつてnが次第に大きくなれば，f_n は次第に少となりnが無限大に近づけばf_nもδに近づく。従つて（15）式の係数は n の相当大なる部分では δ より少し許り大なる而も 1 より小なる或値の乗累より小である。即ち第（15）式は Z の総ての値に対して収斂級数である。従つて

$$\mathbb{U}=\frac{K}{\{4(1-\delta)/(2-\delta)^2\}+6/\{(k_m/2)^2-2\}}\cdot\left\{\frac{2-\delta}{(k_n/2)^2-2}\cdot\frac{\delta\sin Z\cos Z}{(1-\delta\sin^2 Z)^2}\right.$$

$$-\frac{\delta\sin Z\cos Z}{1-\delta\sin^2 Z}+f_1\sin Z\cos Z+f_1f_2\sin^3 Z\cos Z+\cdots\cdots+f_1f_2f_3\cdots$$

$$\left.\cdots f_{n+1}\sin^{2n+1}Z\cos Z+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

4. 特解の一計算法

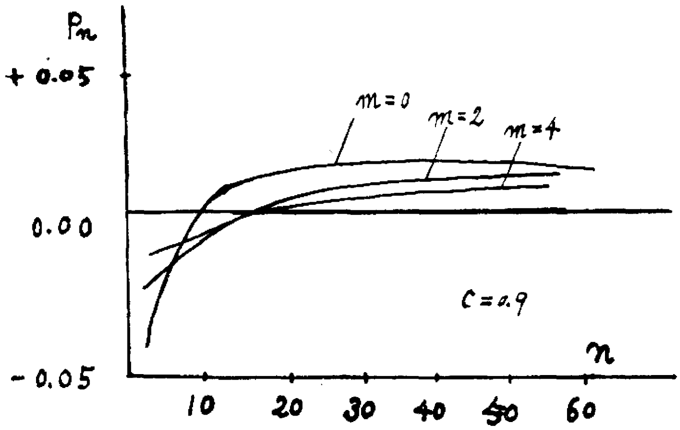
$f_1=y_1/(x_1-f_2)$, $f_2=y_2/(x_2-f_3)\cdots\cdots f_n=y_n/(x_n-f_{n+1})\cdots\cdots\cdots\cdots$ 従つて

$$f_n=\frac{[(n-1)(n+2)+(k_m/2)^2]\delta}{n^2+(k_m/2)^2+(n+2)(n-0.5)\delta-n(n+0.5)f_{n+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

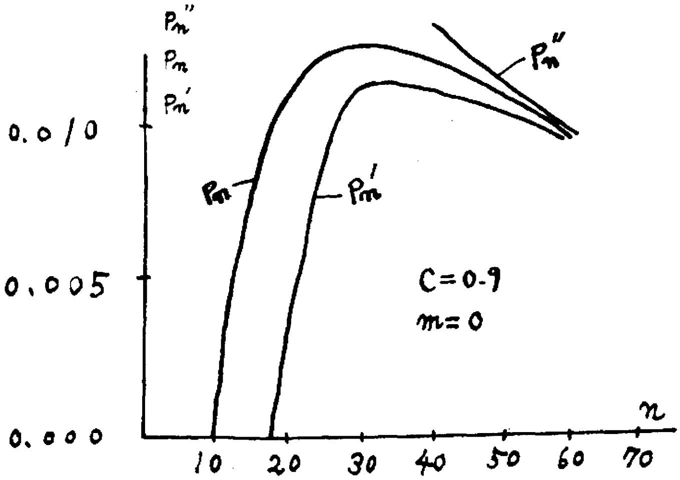
之が n が 1 なる時は δ より小であるが、n が次第に大きくなると f_n も次第に大きくなり δ よりも大となるが n の或値に就て f_n は最大値を呈し，これよりは n が大となる程，f_n は小となり次第に δ に近づき遂に δ に収斂する。今 $f_n=\delta(1+P)$ として P なるものを考える。

$$P_n\ \frac{(n-2)-(n-1)\delta+n(n+0.5)\delta P_{n+1}}{n^2+(k_m/2)^2+(n-1)\delta-n(n+0.5)\delta P_{n+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

第 1 図 (I)



第 1 図 (II)



その計算結果の一例は第1図の様なものでnの小なる時は負数であるがnが次第に大きくなるとP_nも次第に大となり0に近づき0よりも大となりやがて最大値に達してからは減少し始め次第に0に近づき遂に零に収歛する。P_nを計算する一方法として上下2つの漸近曲線を考える。

今 $$P_n'=[(n-2)-(n-1)\delta]/[n^2+(k_m/2)^2+(n-1)\delta-n(n+0.5)\delta] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

で表わされる様なP_n'という値を考える。

$$P_n' < P_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$P_{n+1}=P_n-q_n$としP_{n+1}を消去すると，P_nに就ての2次方程式が出来る。従つて若しq_nなる値が予め与えられておれば，P_nの値が上述の2次方程式から直に求められる訳である。勿論q_nは与えられていないが，$P_{n+1}'=P_n'-q_n'$とするとP_n'及びP_{n+1}'は直に求められるからq_n'という値は直に求まる。このq_n'を前のq_nに代入して得たる値はP_nではないが大分近いものである。この値をP_n''とすると $P_n''>P_n$ $P_n'<P_n<P_n''$ ……(21) 而もnが相当に大になればP_n'及びP_n''は著しくP_nに接近する。即ち相当大なるnの値につきP_n'とP_n''との平均値を以てP_nの値と仮定し，上記のP_nからP_{n-1}を求めP_{n-1}よりP_{n-2}を求めかくして次第に$P_{n-3}, P_{n-4}, \cdots\cdots P_3, {}_2$, P_1と全部のP_nを求めるのである。かくしてf_1, f_2, f_3……を求め，この値を第16式に代入し特解Ⓤを求める。上記の方法に依てnの或値以下のf_nは計算し得るが，これより大なるnの値に対するf_nの値に就ては，次の如くする。

$$\textcircled{U}=\frac{K}{\{4(1-\delta)/(2-\delta)^2\}+6/\{(k_m/2)^2-2\}}\cdot\left\{\frac{2-\delta}{(k_m/2)^2-2}\cdot\frac{\delta\sin Z\cos Z}{(1-\delta\sin^2 Z)^2}\right.$$
$$-\frac{\delta\sin Z\cos Z}{1-\delta\sin^2 Z}+(1+P_1)\delta\sin Z\cos Z+(1+P_1)(1+P_2)\delta^2\sin^3 Z\cos Z\cdots\cdots$$
$$\left.+\cdots\cdots+(1+P_1)(1+P_2)\cdots\cdots(1+P_n)(1+P_{n+1})\delta^{n+1}\sin^{2n+1}Z\cos Z+\cdots\right\}\cdots(22)$$

今

$$(1+P_1)\delta\sin Z\cos Z+(1+P_1)(1+P_2)\delta^2\sin^3 Z\cos Z+\cdots+(1+P_1)(1+P_1)\cdots$$
$$\cdots(1+P_n)\delta^n\sin^{2n-1}Z\cos Z+\cdots\cdots=(1+P_1)\delta\sin Z\cos Z+(1+P_1)(1+P_2)\delta^2$$
$$\sin^3 Z\cos Z+\cdots\cdots+(1+P_1)(1+P_2)\cdots\cdots(1+P_\gamma)\delta^\gamma\sin^{2\gamma-1}Z\cos Z+(1+P_1)$$
$$(1+P_2)\cdots\cdots(1+P_\gamma)[(1+P_{\gamma+1})\delta\sin^2 Z+(1+P_{\gamma+1})(1+P_{\gamma+2})\delta^2\sin^4 Z+\cdots\cdots$$
$$+(1+P_{\gamma+1})(1+P_{\gamma+2})\cdots\cdots(1+P_{\gamma+s})(\delta\sin^2 Z)^s+\cdots\cdots]\delta_\gamma\sin^{2\gamma-1}Z\cos Z \quad\cdots\cdots (23)$$

とし

$$T=(1+P_{\gamma+1}\delta\sin^2 Z+(1+P_{\gamma+1})(1+P_{\gamma+2})(\delta\sin^2 Z)^2+\cdots\cdots$$
$$+(1+P_{\gamma+1})(1+P_{\gamma+2}\cdots\cdots(1+P_{\gamma+s})(\delta\sin^2 Z)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とすると

$$\textcircled{U}=\frac{K}{\{4(1-\delta/(2-\delta)\}^2+6/\{k_m/2)^2-2\}}\cdot\left\{\frac{2-\delta}{(k_m/2)^2-2}\cdot\frac{\delta\sin Z\cos Z}{(1-\delta\sin^2 Z)^2}\right.$$
$$-\frac{\delta\sin Z\cos Z}{1-\delta\sin^2 Z}+(1+P_1)\delta\sin Z\cos Z+(1+P_1)(1+P_2)\delta^2\sin^3 Z\cos Z+\cdots$$
$$\left.\cdots+(1+P_1)(1+P_2)\cdots\cdots(1+P_\gamma)[1+T]\delta^\gamma\sin^{2\gamma-1}Z\cos Z\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

Tの計算は$P_{\gamma+1}$, $P_{\gamma+2}$……等を前記の様には計算せずに他の近似値で代用する。

今 $P_n''' = \frac{1}{a+t} \quad t = [2\gamma + (\gamma-2)C + (1+C)^{(k_m/2)^2}] \Big/ [\gamma(1-C)-2]$ …… (25)

但し $a > \gamma$ とする。然る時は $P_n' > P_n'''$ である。

又 $P'''' = 1/[a + (2 + C)/(1 - C)]$ とすると少くとも $P_n \geqq P_{n+1}$ なる時は，$P_n < P_n''''$ なる事を証明出来る。故に少くとも $P_n \geqq P_{n+1}$ なる時は，$P_n''' < P_n < P_n''''$ …… (26) 従つて T を計算するのに $P_{\gamma+1}$，$P_{\gamma+2}$ …… 等の代りに $P_{\gamma+1}'''$，$P_{\gamma+2}'''$ …… 等を代入して計算した T の値を T′ とすると T′ < T である。

$$T' = \frac{t+\gamma+2}{t+\gamma+1}\delta\sin^2Z + \frac{t+\gamma+2}{t+\gamma+1}\cdot\frac{t+\gamma+3}{t+\gamma+2}(\delta\sin^2Z)^2 + \cdots\cdots$$

$$= \left(1+\frac{1}{t+\gamma+1}\right)\delta\sin^2Z + \left(1+\frac{2}{t+\gamma+1}\right)(\delta\sin^2Z)^2 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\delta\sin^2Z}{1-\delta\sin^2Z} + \frac{1}{t+\gamma+1}\,\frac{\delta\sin^2Z}{(1-\delta\sin^2Z)^2} \quad \cdots\cdots (27)$$

又 $P_{\gamma+1}, P_{\gamma+2}$ …… 等の代りに $P_{\gamma+1}''''$, $P_{\gamma+2}''''$ …… 等を代入して得た T の値を T″ とすると T < T″ である。

$$T'' = \frac{[(2+C)/(1-C)]+(\gamma+2)}{[(2+C)/(1-C)]+(\gamma+1)}\delta\sin^2Z + \frac{[(2+C)/(1+C)]+(\gamma+3)}{[(2+C)/(1-C)]+(\gamma+1)}(\delta\mathrm{sjn}^2Z)^2 + \cdots$$

$$\cdots = \frac{\delta\sin^2Z}{1-\delta\sin^2Z} + \frac{1}{[(2+C)/(1-C)]+(\gamma+1)}\cdot\frac{\delta\sin^2Z}{(1-\delta\sin^2Z)^2} \quad \cdots\cdots (28)$$

即ち T′ < T < T″ であつて T′ と T″ との平均値を以て T の値に代用する。その時は T の値は

$$T \fallingdotseq \frac{\delta\sin^2Z}{1-\delta\sin^2Z} + \left\{\frac{1}{t+\gamma+1} + \frac{1}{[(2+C)/(1-C)+(\gamma+1)}\right\}\cdot\frac{\delta\sin^2Z}{2(1-\delta\sin^2Z)^2} \cdots (29)$$

m の大なる値に就ては次の近似的計算法を採る。

$$1 + P_n = 1 \Big/ \left\{1 - \frac{(a-2)-(a-1)\delta+a(a+0.5)\delta P_{n+1}}{(a-1)(a+2)+(k_m/2)^2}\right. \quad \cdots\cdots (30)$$

m が相当に大きくなると k_m が大となり分母の第2項の分数が分母第1項の1に対して相当に小となるから右辺を展開して第2次以下を省略すると次の関係が得られる。

$$P_n \fallingdotseq \frac{(a-2)-(a-1)\delta + a(a+0.5)\delta P_{n+1}}{(a-1)(a+2)+(k_m/2)^2} \quad \cdots\cdots (31)$$

これより $P_n \fallingdotseq \dfrac{(a-2)-(a-1)\delta - a(a+0.5)\delta(P_n - P_{n+1})}{(a-1)(a+2) - a(a+0.5)\delta + (k_m/2)^2}$ …… (32)

m が大となればなる程 P_n の値は n の如何に拘らず0に近くなる。故に

$$(1+P_1)(1+P_2)(1+P_3)\cdots\cdots(1+P_\gamma) \fallingdotseq 1+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_\gamma \quad \cdots\cdots (33)$$

然る時は

$$(1+P_1)\delta\sin Z\cos Z + (1+P_1)(1+P_2)\delta^2\sin^3\cos Z + \cdots\cdots + (1+P_1)(1+P_2)\cdots$$

$$\cdots(1+P_n)(1+P_{n+1})\cdot\delta^{n+1}\sin^{2n+1}Z\cos Z\cdots\cdots \fallingdotseq (1+P_1)\delta\sin Z\cos Z + (1+P_1$$

$$+P_2)\delta^2\sin^3Z\cos Z + \cdots\cdots + (1+P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n+P_{n+1})\delta^{n+1}\sin^{2n+1}Z\cos Z$$

$$+\cdots\cdots = \frac{\delta\,\mathrm{sjn}Z\cos Z}{1-\delta\sin^2Z}(1+P_1+P_2\delta\sin^2Z+P_3\delta^2\sin^4Z+\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots (34)$$

之を (24) 式に代入すると

$$\textcircled{U}=\frac{K}{\{4(1-\delta)/(2-\delta^2)\}+6/\{(k_m/2)^2-2\}}\cdot\frac{\delta\sin Z\cos Z}{1-\delta\sin^2 Z}$$

$$\times\left\{\frac{2-\delta}{(k_m/2)^2-2}\cdot\frac{1}{1-\delta\sin^2 Z}+P_1+P_2\delta\sin^2 Z+P_3(\delta\sin^2 Z)^2+\cdots\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(35)$$

又 (32) 式より

$$\frac{2-\delta}{(k_m/2)^2-2}+P_n=\frac{[(n-1)(n+2)-n(n+0.5)\delta]}{[(k_m/2)^2-2]\cdot[(n-1)(n+2)+(k_m/2)^2-n(n+0.5)\delta]}$$

$$-\frac{n(n+0.5)\delta(P_n-P_{n+1})}{(k_m/2)^2+(n-1)(n+2)-n(n+0.5)\delta}\quad\cdots\cdots(36)$$

故に k_m がずつと大きく他の項を省略する事が出来るとすると

$$\frac{2-\delta}{(k_m/2)^2-2}+P_n\fallingdotseq\frac{n(1-\delta)}{(k_m/2)^2-2}\quad\cdots\cdots(37)$$

$$\textcircled{U}\fallingdotseq\frac{K\cdot[1-\delta]/[(k_m/2)^2-2]/[(k_m/2)^2-2]}{\{4(1-\delta)/(2-\delta^2)\}+6/\{k_m/2)^2-2\}}\cdot\frac{\delta\sin Z\cos Z}{(1-\delta\sin^2 Z)^3}$$

$$\fallingdotseq\frac{\alpha(2-\delta)^2\delta\sin Z\cos Z}{4(2m+1)[(k_m/2)^2-2](1-\delta\sin^2 Z)^3}\quad\cdots\cdots(38)$$

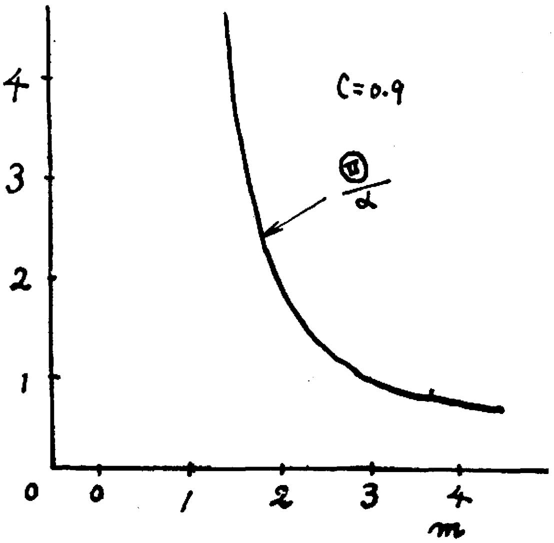
故に

$$U=\frac{1}{(1+C\cos 2Z)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\alpha(2-\delta)^2\delta\sin Z\cos Z}{4(2m+1)[(k_m/2)^2-2](1-\delta\sin^2 Z)^3}$$

$$=\frac{1}{\{1+C\cos 2(\frac{\pi}{2}-x)\}^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\alpha(2-\delta)^2\delta\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{4(2m+1)[(k_m/2)^2-2](1-\delta\sin^2(\frac{\pi}{2}\pi-x)^3}$$

$$=\frac{1}{\{1-C\cos 2x\}^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\alpha(2-\delta)^2\delta\cos x\sin x}{4(2m+1)[(k_m/2)^2-2](1-\delta\sin^2\frac{\pi}{2}-x))^3}\quad\cdots\cdots(39)$$

第 2 図



之が特解である。従つて完全解は一般解と特解の和として求められる。

5．計　　　算　　　例

特解の計算例を掲げると，第2表の f_1, f_2, f_3…… 等を代入して夫々のZの値に対して計算すると夫々の Zに対する特解が求められる。第3表は $Z=\frac{\pi}{2}$ なるときの特解の値を計算したものである。第4表は特解 Ⓤ$/\alpha$ を種々のZに対して計算した結果を表す。

第3図は捲線に沿う電圧分布を示す。

次に一般解を求めてみる。$\Delta(0)$ を求めるために a_1 a_2 …… 及び分母 $(2n)^2-a_0$ を計算すると次の様になる。　$a_1=-0.624871$
$a_2=0.032509$　$a_3=0.000191$　$a_4=0.000293$
$a_5=-0.000061$　$a_6=0.000009$　$a_7=-0.000001$

第 1 表　Pn

n＼m	0	1	2	3	4
1	-0.362	-0.049	-0.017	-0.009	-0.005
2	-0.196	-0.045	-0.017	-0.009	-0.005
3	-0.123	-0.038	-0.015	-0.008	-0.005
4	-0.084	-0.033	-0.014	-0.007	-0.005
5	-0.059	-0.028	-0.013	-0.007	-0.004
6	-0.043	-0.023	-0.011	-0.006	-0.004
7	-0.031	-0.019	-0.010	-0.006	-0.004
8	-0.022	-0.015	-0.009	-0.005	-0.003
9	-0.016	-0.012	-0.007	-0.005	-0.003

第 2 表　$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)/\sigma$

m	0	1	2	3	4
f_1/δ	0.637	0.950	0.982	0.990	0.994
$f_1 f_2/\delta$	0.485	0.860	0.915	0.931	0.937
$f_1 f_2 f_3/\delta$	0.403	0.783	0.853	0.875	0.884
$f_1 f_2 f_3 f_4/\delta$	0.350	0.717	0.797	0.823	0.833
$f_1 f_2 \cdots f_5/\delta$	0.312	0.660	0.746	0.774	0.786
$f_1 f_2 \cdots f_6/\delta$	0.283	0.111	0.693	0.729	0.742
$f_1 f_2 \cdots f_7/\delta$	0.259	0.567	0.655	0.686	0.700
$f_1 f_2 \cdots f_8/\delta$	0.240	0.529	0.615	0.647	0.661
$f_1 f_2 \cdots f_9/\delta$	0.224	0.495	0.578	0.610	0.625
$f_1 f_2 \cdots f_{10}/\delta$	0.210	0.465	0.544	0.575	0.590
$f_1 f_2 \cdots f_{11}/\delta$	0.198	0.437	0.513	0.544	0.558
$f_1 f_2 \cdots f_{12}/\delta$	0.187	0.413	0.484	0.514	0.528
$f_1 f_2 \cdots f_{13}/\delta$	0.177	0.390	0.457	0.485	0.499
$f_1 f_2 \cdots f_{14}/\delta$	0.167	0.369	0.433	0.459	0.472
…………	……	……	……	……	……
…………	……	……	……	……	……
$f_1 f_2 \cdots f_{39}/\delta$	0.055	0.115	0.126	0.128	0.128
$f_1 f_2 \cdots f_{40}/\delta$	0.053	0.110	0.121	0.122	0.122

第 3 表　$Z=\frac{\pi}{2}$

$\left\{\sum_{n=1}^{40}(f_1 f_2 \cdots f_n)\right\}/\delta$	6.615	13.572	15.348	15.992	16.289
t	59.238	76.338	110.538	161.838	230.238
$T_Z=\frac{\pi}{2}$	22.149	21.900	21.571	21.286	21.073
$(f_1 f_2 \cdots f_{40} \cdot S_{Z=\frac{\pi}{2}})/\delta$	1.168	2.412	2.605	2.606	2.573
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_1 f_2 \cdots f_n\right)/\delta$	7.784	15.984	17.953	18.598	18.862
$\dfrac{2-\delta}{[(km/2)^2-2](1-\delta \sin^2 Z)^2}$	1.520	20.822	7.005	3.510	2.108
$-1/(1-\delta \sin^2 Z)$	− 19	− 19	− 19	− 19	− 19
以上3項の合計	1508.784	17.806	5.957	3.109	1.970
Ⓤ$^m/\alpha\ \delta \sin \mathbf{Z} \cdot coo\mathbf{Z}$	62.372	11.441	3.964	1.809	0.980

第 4 表　Ⓤ$_n/\alpha$

Z＼m	0	1	2	3	4
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
85	3.936	0.705	0.239	0.107	0.057
80	4.228	0.680	0.215	0.091	0.047
70	1.941	0.232	0.062	0.024	0.012
50	0.392	0.025	0.005	0.002	0.001
30	0.114	0.005	0.001	0.000	0.000
10	0.027	0.000	0.000	0.000	0.000

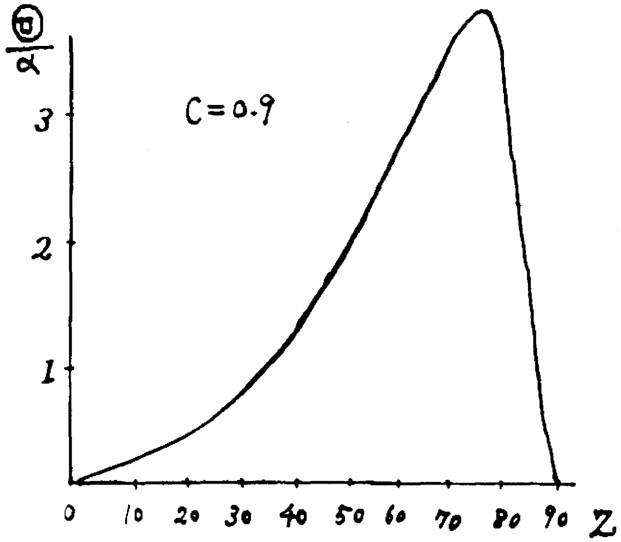
之等の数字を $\Delta(\lambda)$ に代入して $\lambda=0$ とするとその値は，第5表のようになる。上記の $\Delta(0)$ の計算は，無限行列式を用いず9行9列の有限行列式を計算したものでそのための誤差は僅少である。又 λ は次式により計算したものである。

$$\sin(i\lambda\pi/2)=\pm\sqrt{[\Delta(0)]}\sin(\sqrt{a_0}/2)$$

第 5 表　（I）

m	0	1	2	3
$-a_0$	81.186	729.186	2025.186	3969.186
$4-a_0$	85.186	733.186	2029.186	3973.186
$16-a_0$	97.189	745.186	2041.186	3985.186
$36-a_0$	117.186	765.186	2061.186	4005.186
$64-a_0$	145.186	793.186	2089.186	4033.186

第 3 図

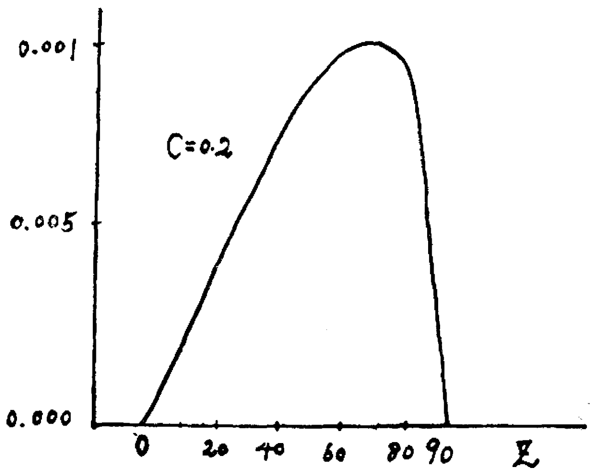


第5表の数値を代入して$\varDelta_0$及び$\varDelta_n$を求め，γ_n及びβ_nの値を求めると第6表の様になる。第6表に得た数値を，式に代入し種々のθに就て値を求めると第7表の如くなる。以上の特解表は何れも，$a_{3n} \gg a_{2n}$ の場合を扱つているので然らざる時にはこの表は使用出来ない。尙時間に関する完全解

第 5 表　（Ⅱ）C = 0.2

m	0	1	2	3
$\Delta(o)$	0.997	1.000	1.000	1.000
λ	-9.010	-27.003	-45.002	-63.001
$-a_0-\lambda_2$	0.002	0.000	0.000	0.000

第 4 図



第 6 表　γ^n 及び β_n の値

m	0	1	2	3	4
γ_1	-0.0020	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
γ_2	0.0002	-0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
γ_3	-0.0000	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
γ_4	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
γ_5	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
β_1	-0.0171	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
β_2	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
β_3	0.0004	-0.0057	0.0000	0.0001	0.0000
β_4	0.0000	0.0015	0.0000	0.0000	-0.0000
β_5	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

第 7 表　一　般　解

Z \ m	0	1	2	3	4
10	0.1626	0.6950×10^{-2}	0.3004×10^{-3}	0.1297×10^{-4}	0.5606×10^{-6}
20	0.3560×10^{-1}	0.6540×10^{-4}	0.1221×10^{-6}	0.2278×10^{-9}	0.4254×10^{-12}
30	0.7717×10^{-2}	0.6254×10^{-6}	0.5096×10^{-10}	0.4106×10^{-14}	0.3312×10^{-18}
40	0.1823×10^{-2}	0.6238×10^{-8}	0.2166×10^{-13}	0.7553×10^{-19}	0.2633×10^{-24}
50	0.4194×10^{-3}	0.6228×10^{-10}	0.9271×10^{-17}	0.1406×10^{-23}	0.2118×10^{-30}
60	0.9620×10^{-4}	0.6210×10^{-12}	0.4024×10^{-20}	0.2618×10^{-28}	0.1704×10^{-36}
70	0.2169×10^{-4}	0.6094×10^{-14}	0.1708×10^{-23}	0.4805×10^{-33}	0.1352×10^{-42}
80	0.4737×10^{-5}	0.5798×10^{-16}	0.7044×10^{-27}	0.8569×10^{-38}	0.1043×10^{-48}
85	0.2181×10^{-5}	0.5571×10^{-17}	0.1409×10^{-28}	0.3565×10^{-40}	0.2851×10^{-50}

は Laplace 変換式　$u = \frac{1}{2\pi j}\int_c U e^{\lambda t} d\lambda$

$$v = \frac{1}{2\pi j}\int_c V \cdot e^{\lambda t}\, d\lambda$$ に代入すれば得られる。

6. 結　　言

本論文は普通の単重変圧器捲線内に於ける電圧分布を数式的に解析したもので第2式の正式な解法の一つで従来同様の問題を扱つかつたのは沢山あるが捲線函数を一般の形にて表したのは少くそれの解も繁雑になり抽象的であるので或種の近似的解法を試みて電位分布の一般式を誘導した。且つ二，三の計算例及び図表を附記することにした。実験結果との比較は次の機会にしたい。

参考文献

(1)　小　川　電学誌　第58巻　第602号　P. 749　昭和13年9月